Nivel 2

VI ONEM

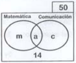
OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2009

PRIMERA FASE

26 de junio 2009

PROBLEMA N° 1.
En un salón de clases de 50 alumnos, 24 no trajeron el libro de comunicación y 28 no trajeron el libro de matemática. Si 14 estudiantes no trajeron el libro de matemática ni el de comunicación, ¿cuántos estudiantes trajeron solamente un libro?

A) 14 B) 28 C) 24 D) 30 E) 20



Resolución:
Hacemos un diagrama de Venn de acuerdo a los datos.
No trajeron el libro de comunicación: $m + 14 = 24 \rightarrow m = 10$
No trajeron el libro de matemática : $c + 14 = 28 \rightarrow c = 14$

Sólo trajeron un libro: $m + c = 10 + 14 = 24$

Rpta 24

PROBLEMA N° 2.
Raúl reparte su herencia entre sus tres hijas de tal forma que la primera le toca los 4/15 del total, a la segunda los 3/5 y a la tercera S/. 1800. ¿Cuál fue el total de la herencia?

A) S/. 13500 B) S/. 750 C) S/. 3000 D) S/. 9000 E) S/. 15000

Resolución:
Sea herencia : H
A la primera: $\frac{4}{15}H$ A la segunda $\frac{3}{5}H$ A la tercera S/. 1800.

Total: $H = \frac{4}{15}H + \frac{3}{5}H + S/.\ 1800 \rightarrow H - \frac{13}{15}H = 1800 \rightarrow \frac{2}{15}H = 1800 \rightarrow H = 13500$

Rpta S/. 13500

PROBLEMA N° 3.
Si m y n son números enteros tales que $m + n = 5$, entonces $2m - n$ no puede ser igual a:

A) -5 B) 1 C) -2 D) 2 E) 7

Resolución:
Si $m + n = 5 \rightarrow 5 = 1 + 4 = 2 + 3$ ó visceversa
Entonces $2m - n = \{-2; 1; 7; -5\}$ pero no ocurre $2m - n = 2$

Rpta 2

PROBLEMA N° 4.
Omar tiene cierto número de rosas y quiere regalarlas a sus amigas. Si regala 8 a cada una le sobran 15, pero si quisiera regalar 11 rosas a cada una le faltarían 3. ¿Cuántas rosas tiene Omar?

A) 63 B) 61 C) 69 D) 78 E) 55

Resolución:

Sea el número de rosas: x

Del enunciado: $x = \overset{\circ}{11} - 3 = \overset{\circ}{11} + 8 \quad = \{ 19; 30; 41; 51; \mathbf{63} = 55+ 8; ....\}$

$x = \overset{\circ}{8} + 15 = \overset{\circ}{8} - 1 \quad = 64 - 1 = 63$

Rpta 63

PROBLEMA N° 5.

Dos números son tales que el triple del mayor excede a un tercio del menor en 176; y cinco veces el menor excede a tres octavos del mayor en 216. Halla la diferencia positiva de los números.

A) 36 B) 64 C) 16 D) 24 E) 48

Resolución:

Sean los números: "x" el mayor ; "y" el menor

Del enunciado: $3x = \frac{y}{3} + 176 \rightarrow 9x = y + 3(176) \rightarrow y = 9x - 528$ ... (I)

$5y = \frac{3x}{8} + 216 \rightarrow 40y = 3x + 8(216)$ ... (II)

Reemplazamos "y" en II: $40(9x - 528) = 3x + 1728 \rightarrow 360x - 21120 = 3x + 1728$

Luego: $357x = 22848 \rightarrow \frac{22848}{357} = 64 = x$

Reemplazamos "x" en I: $y = 9(64) - 528 = 576 - 528 = 48$

Piden: $x - y = 64 - 48 = 16$

Rpta 16

PROBLEMA N° 6.

Sea P(x) un polinomio tal que: $x.P(x+1) = P(x^2+1)$

Si P(3)=2, halla el valor de P(5).

A) 6 B) 5 C) -1 D) 0 E) 4

Resolución:

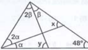
Como: $x.P(x+1) = P(x^2 + 1) \rightarrow$ Si $x = 2 \rightarrow 2P(2+1) = P(2^2 + 1)$

$\rightarrow 2P(3) = P(5) = 2(2) = 4$

Rpta 4

PROBLEMA N° 7.

En la siguiente figura calcula el valor de x + y



A) 140° B) 144 C) 148° D) 152° E) 156°

Resolución:

Del gráfico:

Propiedad de ángulos internos de un triángulo: $3\alpha + 3\beta + 48° = 180° \rightarrow 3(\alpha + \beta) = 132°$

$\rightarrow \alpha + \beta = 44°$

Propiedad del ángulo externo de un triángulo: $\beta + 48° = y$; $\alpha + 48° = x$

Piden: $x + y = \alpha + 48° + \beta + 48° = (\alpha + \beta) + 96° = 44° + 96° = 140°$

Rpta 140°

PROBLEMA N° 8.

Sean $\frac{1}{a+1}=2;\quad \frac{1}{b+2}=3;\quad \frac{1}{c+3}=6$

Halla: $\frac{1}{a+b+c}$

A) 1/10 B) -1/5 C) 2/5 D) -13/6 E) -2/9

Resolución:

De los datos:

$\frac{1}{a+1}=2 \quad \rightarrow \quad 1=2a+2 \quad \rightarrow \quad a=\frac{-1}{2}$

$\frac{1}{b+2}=3 \quad \rightarrow \quad 1=3b+6 \quad \rightarrow \quad b=\frac{-5}{3}$

$\frac{1}{c+3}=6 \quad \rightarrow \quad 1=6c+18 \quad \rightarrow \quad c=\frac{-17}{6}$

Sumemos: $a+b+c=\frac{-1}{2}+\frac{-5}{3}+\frac{-17}{6}=\frac{-3-10-17}{6}=\frac{-30}{6}=-5$

Nos piden hallar: $\frac{1}{a+b+c}=\frac{-1}{5}$

Rpta $\frac{-1}{5}$

PROBLEMA N° 9.

Halla el coeficiente del término de mayor grado del polinomio

$P(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - (x^2 - y^2)^3$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Resolución:

Desarrollemos los binomios al cubo en el polinomio

$P(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - (x^2 - y^2)^3 = (x^6 + 3x^4y + 3x^2y^2 + y^3) - (x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3)$

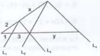
$= 6x^4y + 2y^3$

El término de mayor grado es $6x^4y$, cuyo coeficiente es 6.

Rpta 6

PROBLEMA N° 10.

Los segmentos L_1 y L_2 son paralelos entre sí, y los segmentos L_3 y L_4 también son paralelos entre sí. Halla el valor de x + y.



A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Resolución:

Observando el gráfico; vemos que las paralelas forman segmentos proporcionales; por lo cual podemos aplicar el Teorema de Thales.

$\frac{1}{3}=\frac{2}{x} \quad \rightarrow \quad x=6$

$\frac{1+3}{y}=\frac{2}{x} \rightarrow \quad 2y=4(6) \quad \rightarrow \quad y=12$

Finalmente: x + y = 18

Rpta 18

PROBLEMA N° 11.

Si p y q son números primos tales que $p + q^2 = 102$, halla $p + q$

A) 82 B) 60 C) 62 D) 96 E) 94

Resolución:

Los números primos menores que cien son los siguientes:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.
$q^2 = \{4; 9; 25; 49\}$ descartamos los cuadrados de los demás números primos.
$q^2 = 102 - p$
Al restar: $102 - 4 = 98$; $102 - 9 = 93$; $102 - 25 = 77$; $102 - 49 = 53$

Vemos que para $q = 7$ el único primo correspondiente es $53 = p$
Piden la suma $p + q = 60$

Rpta 60

PROBLEMA N° 12.

Simplifica: $\sqrt[7]{\dfrac{4^6\times6^9\times9^4}{9^9\times6^6\times4^4}}$

A) 2 B) 3/2 C) 4/3 D) 2/3 E) 1

Resolución:

Aplicamos las leyes de exponentes en:

$$\sqrt[7]{\frac{4^6\times6^9\times9^4}{9^9\times6^6\times4^4}} = \sqrt[7]{\frac{4^{6-4}\times6^{9-6}}{9^{9-4}}} = \sqrt[7]{\frac{4^2\times6^3}{(3^2)^5}} = \sqrt[7]{\frac{2^4\times2^3\times3^3}{3^{10}}} = \sqrt[7]{\frac{2^7}{3^7}} = \frac{2}{3}$$

Rpta 2/3

PROBLEMA N° 13.

La suma de 42 enteros consecutivos siempre es:

A) Múltiplo de 42 B) Múltiplo de 6 C) Múltiplo de 7, pero no de 3
D) Múltiplo de 43 E) Múltiplo de 21, pero no de 2

Resolución:

Sea S la suma de los 42 enteros consecutivos:
$S = (n - 20) + (n - 19) + ... + (n - 2) + (n - 1) + \mathbf{n} + (n + 1) + (n + 2) + ... + (n + 20) + \mathbf{(n + 21)}$

$S = 42n + 21 = 21\,(2n + 1)$

La suma es múltiplo de 21, pero no de 2; pues $2n + 1$ siempre es impar y, el producto de dos impares siempre es impar.

Rpta Múltiplo de 21, pero no de 2

PROBLEMA N° 14.

Juan es un comerciante que viaja exactamente dos veces por semana; él puede escoger los días en que va viajar. Si Juan viaja un lunes ya no viaja el martes, y además, por cuestiones personales, nunca viaja un sábado. ¿De cuántas formas puede escoger sus días de viaje en una semana determinada?

A) 4 B) 8 C) 10 D) 14 E) 18

Resolución:

Si viaja 2 veces por semana;
El primer día lo puede escoger entre 6 días (ya que nunca viaja el sábado)
El siguiente día lo escoge entre 4, pues no viaja el siguiente.
El siguiente día lo escoge entre 2, puede ser viernes o domingo.
Y por último aquellos 2 días como el martes o jueves.
En total 14 formas de escoger sus días de viaje.

Rpta 14

PROBLEMA N° 15.

Halla la suma de todos los valores reales que puede tomar x en la siguiente ecuación:

$$\frac{x^3+x^2}{x+1}=\frac{3^3+3^2}{3+1}$$

A) 1 B) 3 C) -1 D) 0 E) 6

Resolución:

En la expresión $\frac{x^3+x^2}{x+1}=\frac{3^3+3^2}{3+1}$ por simple observación: $x_1 = 3$; $x \neq -1$

Realizando las operaciones: $4x^3 + 4x^2 = (27 + 9)(x+1) \rightarrow 4x^3 + 4x^2 = 36x + 36$

Luego $4x^3 + 4x^2 - 36x - 36 = 0 \rightarrow x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$

Por divisores binómicos una de las raíces es un divisor de -9; en este caso: $x_2 = -3$ y $x_3 = -1$

Pero $x \neq -1$

La suma de raíces = 3 - 3 = 0

Rpta 0

PROBLEMA N° 16.

Se dan dos números naturales a y b de modo que ninguno de ellos es múltiplo de 10. Si el producto de a y b es una potencia de 10 y a > b, entonces el último dígito de a – b no puede ser

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Resolución:

Los números naturales a y b; donde : a > b
$ab = 10k = (2^k)(5^k)$ Luego: $a = 2^k$ y $b = 5^k$
El último dígito de $a - b = 5^k - 2^k$ puede ser:

Si k = 1 →	5 - 2	= 3	
Si k = 2 →	25 - 4	= ..1	
Si k = 3 →	125 - 8	= ..7	
Si k = 4 →	....25 - 16	= ..9	
Si k = 5 →	....25 - 32	= ..3	A partir de aquí la secuencia se repite: 3; 1; 7; 9.
⋮	⋮		

No se obtiene como último dígito el 5.

Rpta 5

PROBLEMA N° 17.

La moneda de un país lejano es el peso y hay monedas de 4 pesos, 1 peso y medio peso. María lleva al banco 54 monedas que hacen un total de 200 pesos. ¿Cuánto dinero llevó María al banco en monedas de cuatro pesos?

A) 156 B) 200 C) 188 D) 192 E) 196

Resolución:

Sean la cantidad de monedas X ; P y M de 4; 1 y ½ peso. Donde: $X \geq 0$; $P \geq 0$; $M \geq 0$

Cantidad : $X + P + M = 54 \rightarrow X = 54 - P - M$ ... (I)

Valor en pesos : $4X + P + 0,5M = 200 \rightarrow X = \dfrac{200 - P - 0,5M}{4}$ ... (II)

Igualamos (I) y (II): $54 - P - M = \dfrac{200 - P - 0,5M}{4} \rightarrow 216 - 4P - 4M = 200 - P - 0,5M$

Luego: $16 = 3P + 3,5M = 3(3) + 3,5(2) = 9 + 7 \rightarrow P = 3$ y $M = 2$

Reemplazando en (I): $X = 54 - 3 - 2 = 49$ monedas

Piden el valor monetario: $4X = 4(49) = 196$ pesos.

Rpta 196

PROBLEMA N° 18.

En el tablero mostrado se continúan colocando enteros positivos según la siguiente regla: Si en una fila están escritos los números (a, b, c) entonces en la siguiente fila se escribe los números (b+1, c+1, a+1). En la primera fila están escritos los números (1, 2, 3) y para las otras filas se aplica la regla. ¿Cuál es el número que se ubica al centro de la fila 2009?

fila 1 —	1	2	3
fila 2 —	3	4	2
fila 3 —	5	3	4
⋮	⋮	⋮	⋮

A) 2009 B) 2010 C) 2011 D) 2012 E) 2013

Resolución:

fila 1 —	1	2	3	— $\overset{\circ}{3}+1$
fila 2 —	3	4	2	— $\overset{\circ}{3}+2$
fila 3 —	5	3	4	— $\overset{\circ}{3}$
fila 4 —	4	5	6	— $\overset{\circ}{3}+1$
fila 5 —	6	7	5	— $\overset{\circ}{3}+2$
fila 6 —	8	6	7	— $\overset{\circ}{3}$
⋮	⋮	⋮	⋮	
fila 2009 —	2010	2011	2009	— $\overset{\circ}{3}+2$

2009+2

En el gráfico, buscaremos una relación entre el número de fila y la ubicación de los números.

Se cumple una ley de formación, donde él número de la fila va en el casillero del extremo derecho; si la fila es $\overset{\circ}{3} + 2 = 2009$.

El casillero central lo ocupa: $2011 = 2009 + 2$

Rpta 2011

PROBLEMA N° 19.

En cada una de las casillas del siguiente tablero de 3x3 se escribe un número real. Se sabe que el producto de los tres números de cualquier fila o de cualquier columna es igual a 4. Además, el producto de los cuatro números de cualquier subtablero de 2 x 2 es igual a 8. Calcula la suma de los 9 números escritos en el tablero.

A) 16 B) 18 C) 10 D) 25 E) 25

Resolución:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Sea el tablero 3x3 : Piden hallar: $a + b + c + d + e + f + g + h + i$

Según el enunciado del problema:

Producto de 3 números: $abc = def = ghi = adg = beh = cfi = 4$ ... (I)

Producto de 2 números: $abde = bcef = degh = efhi = 8$ .... (II)

De (II): $\dfrac{abde}{bcef} = \dfrac{ad}{cf} = 1 \rightarrow ad = cf$ ... (1)

De (I) : $adg = cfi$, reemplazando en (1): $adg = (ad)i \rightarrow g = i$

De modo análogo se demuestra que $a = c$
Con el mismo procedimiento se obtiene que: $a = g = i$
Reemplacemos lo hallado en el tablero ahora queda así:

a	b	a
d	e	f
a	h	a

En fila 1 y columna 1 tenemos: $aba = ada \rightarrow b = d$
De modo análogo: $f = h$, $d = h$

Luego el tablero ahora luce así:

a	b	a
b	e	b
a	b	a

En 2da fila: $beb = eb^2 = 4 \rightarrow e = \dfrac{4}{b^2}$

En 1er subtablero 2x2: $abbe = abb(\dfrac{4}{b^2}) = a \cdot 4 = 8 \rightarrow a = 2$

2	b	2
d	e	b
2	b	2

El tablero queda así:

En 1ra fila: $2 \cdot b \cdot 2 = 4 \rightarrow b = 1$

En 2da fila: $b \cdot e \cdot b = 1 \cdot e \cdot 1 = 4 \rightarrow e = 4$

Por lo tanto, el tablero es:

2	1	2
1	4	1
2	1	2

Entonces: $a + b + c + d + e + f + g + h + i$
$2 + 1 + 2 + 1 + 4 + 1 + 2 + 1 + 2 = 16$

Rpta 16

PROBLEMA N° 20.

Los números reales a, b y c son tales que $a + b + c = 6$ y $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a} = 1$

Halla $\dfrac{bc}{a+b} + \dfrac{ca}{b+c} + \dfrac{ab}{c+a}$

A) 0 B) 1 C) 6 D) 36 E) 1/6

Resolución:

Como: $a + b + c = 6 \rightarrow c = 6 - (a + b)$; $a = 6 - (b + c)$; $b = 6 - (a + c)$

En la expresión: $N = \dfrac{bc}{a+b} + \dfrac{ca}{b+c} + \dfrac{ab}{c+a}$

$N = \dfrac{b[6-(a+b)]}{a+b} + \dfrac{c[6-(b+c)]}{b+c} + \dfrac{a[6-(c+a)]}{c+a} = (\dfrac{6b}{a+b} - b) + (\dfrac{6c}{b+c} - c) + (\dfrac{6a}{c+a} - a)$

$N = 6(\dfrac{b}{a+b} + \dfrac{c}{b+c} + \dfrac{a}{c+a}) - (a + b + c) = 6(\dfrac{b}{a+b} - 1 + \dfrac{c}{b+c} - 1 + \dfrac{a}{c+a} - 1 + 3) - (6)$

$N = 6(\dfrac{-a}{a+b} + \dfrac{-b}{b+c} + \dfrac{-c}{c+a} + 3) - 6$ Dato: $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a} = 1$

$N = 6(-1 + 3) - 6$
$N = 12 - 6$

$N = 6$

Rpta 6