VI ONEM

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2009

SEGUNDA FASE

28 de agosto 2009

PROBLEMA N° 1.

Se tiene dos fracciones equivalentes tales que sus numeradores suman 15 y sus denominadores son 2 y 4, respectivamente. Halla el mayor de los numeradores.

Resolución:

Sean las fracciones equivalentes: $\frac{a}{2} = \frac{b}{4}$ ➜ $b = 2a$ ..... (I)

Dato: $a + b = 15$ ➜ $a + 2a = 15$ ➜ $a = 5$

a en (I) ➜ $b = 10$, que es el mayor de los numeradores.

Rpta 10

PROBLEMA N° 2.

Un colegio contrató a un técnico para trabajar durante 15 días con un salario de 30 nuevos soles diarios, pero cada día que el técnico llega tarde, solo gana 20 nuevos soles. Si el técnico trabajó los 15 días y término ganando 410 nuevos soles, ¿Cuántos días llegó tarde?

Resolución:

Sea: **x** el número de días que llegó temprano.
y el número de días que llegó tarde.

Donde: $x + y = 15$ ..... (I)

El ingreso total es: $30x + 20y = 410$ ➜ $3x + 2y = 41$ ..... (II)

Multiplicando 2(I) $2x + 2y = 30$

Restamos: (II) - 2(I) ➜ $x = 11$

Luego: $y = 15 - 11 = 4$ días

Rpta 4 días

PROBLEMA N° 3.

Si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = 2$, halla $(b + d)\left(\frac{2}{a+c} + \frac{1}{c+e}\right)$

Resolución:

De la serie de razones: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = 2$

$a = 2b$; $b = 2c$; $c = 2d$; $d = 2e$

Luego: $\mathbf{a + c} = 2b + 2d = 2(b + d)$; $\mathbf{2c + 2e} = b + d$

En la expresión: $(b + d)\left(\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{a+c}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{c+e}}\right) = (b + d)\left(\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{2(b+d)}} + \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{2c+2e}}\right)$

$= (b + d)\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{b+d}} + \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{b+d}}\right) = 1+2= 3$

Rpta 3

Problema N° 4.

¿Cuál es el menor número natural que tiene tres digitos y que al elevarlo al cuadrado resulta un múltiplo de 18?

Resolución:

Del enunciado: $\overline{\mathbf{abc}}^{\,2} = \overset{\circ}{\mathbf{18}}$ (Múltiplo de 18)

El cuadrado perfecto a formar es: $\overset{\circ}{\mathbf{18}} = (2\times3^2)(2\times K^2) = 6^2\times K^2 = (6k)^2 = \overline{\mathbf{abc}}^{\,2}$

De donde: $\overline{\mathbf{abc}} = 6K$

Debemos hallar el menor número de tres dígitos que resulta del producto: 6K = {102; 108; ...

}

Luego K = 17

Finalmente: $\overline{\mathbf{abc}} = 6(17) = 102$

Rpta 102

Problema N° 5.

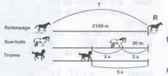
En una carrera de 2100m participan tres caballos llamados Relampago, Suertudo y Trueno. Relámpago llega a la meta con una ventaja de 30 m sobre Suertudo y 5 segundos antes que Trueno. Suertudo llegó 3 segundos antes que Trueno. ¿Cuántos segundos tardó Relámpago en llegar a la meta?

Aclaración: Suponer que, desde el inicio, cada uno de los caballos corre a velocidad constante.

Resolución:

Si T es el tiempo que demora Relámpago.

Graficamos según los datos del problema:



Conocemos que: e = vT (espacio = velocidad × tiempo)

Para Suertudo: $30\text{ m} = 2V_S$ ➜ $V_S = 15$ m/s

Además: $T(V_S) + 30 = 2100$ ➜ $2070 = 15T$

Luego: $T = \dfrac{\mathbf{2070}}{\mathbf{15}} = 138$ segundos

Rpta 138 s

Problema N° 6.

Se tiene dos cuadrados de lados enteros tales que la suma de sus áreas es 650. ¿Cuántos valores distintos puede tomar la suma de sus perímetros?

Resolución:

Sean los cuadrados de lados "x" e "y".

Áreas : x^2 e y^2 → $x^2 + y^2 = 650$

Perímetros : $4x$ e $4y$ → $4(x + y)$

Tenemos que hallar los valores de **x** e **y**.

Acotemos los valores: $y^2 < 26^2 = 676$; $x^2 \leq 25^2 = 625$

Luego:

$x = 25$; $y = 5$ → $x^2 + y^2 = 650 = 625 + 25$

$x = 23$; $y = 11$ → $x^2 + y^2 = 650 = 529 + 121$

$x = 19$; $y = 17$ → $x^2 + y^2 = 650 = 361 + 289$

Finalmente; (x+y) puede tomar 3 valores: {30; 34; 36}, así como 4(x+y)

Rpta 3 valores

Problema N° 7.

Siete personas, todas de edades diferentes, se reúnen y se dan cuenta de que la suma de todas sus edades es 123; la suma de las edades de las dos menores es 29 y la suma de las edades de las dos mayores es 41. Si se hace una lista de las siete personas, considerando las edades de mayor a menor, ¿cual es la edad de la persona que ocupa el cuarto lugar?

Resolución:

Sean las edades de las 7 personas, ordenadas de mayor a menor:

a	b	c	d	e	f	g

Del enunciado: $a + b + c + d + e + f + g = 123$

$a + b = 41$

$f + g = 29$

Luego: $c + d + e = 123 - 41 - 29 = 53$

Ya que las 7 edades no son iguales: $7(17) + 4 = 123$

La mayor de todas debe ser: $17 + 4 = 21 = a$

Luego: $b = 20$

En $c + d + e = 53 = 3(17) + 2$ → $c = 19$ y $e = 16$ pues son edades diferentes al promedio 17.

Como son edades diferentes:

21	20	19	d=18	16	15	14

Rpta 18

Problema N° 8.

Los enteros positivos a, b, c forman, en ese orden, una progresión aritmética de razón r (r>0). si a es múltiplo de 3, b es múltiplo de 7 y c es múltiplo de 9, ¿cuál es el menor valor que puede tomar a + b + c?

Resolución:

Del enunciado: a, b, c es una progresión aritmética.

Además : 3x; 7y; 9z

Donde la razón: $r = 7y - 3x = 9z - 7y$ → $14y = 3(x + 3z)$

Luego : y = 3 , además: x + 3z = 14, como nos piden el menor valor: z = 3 ; x = 2

La progresión aritmética sería: 6; 21; 36 con razón 15.

Piden la suma: 6 + 21 + 36 = 63

Rpta 63

Problema N° 9.

Encuentra el mayor número de cinco dígitos distintos $\overline{\mathbf{abcde}}$ tal que $\overline{\mathbf{ab}}$, $\overline{\mathbf{bc}}$, $\overline{\mathbf{cd}}$ y $\overline{\mathbf{de}}$ sean números primos. Da como respuesta a+b+c+d+e.

Resolución:

Los números primos menores que cien son los siguientes: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

Para hallar el mayor número de cinco dígitos distintos $\overline{\mathbf{abcde}}$, tomaremos los mayores números primos de dos cifras.

$\overline{\mathbf{ab}}$ = 89, $\overline{\mathbf{bc}}$ = 97, $\overline{\mathbf{cd}}$ = 73 y $\overline{\mathbf{de}}$ = 31 → $\overline{\mathbf{abcde}}$ = 89731

Luego: a + b + c + d + e = 8 + 9 + 7 + 3 + 1 = 28

Rpta 28

Problema N° 10.

Se escribe algunos enteros positivos distintos entre sí, en cada uno de los siete hexágonos de la siguiente figura, de modo que no hay dos o tres hexágonos vecinos cuya suma sea múltiplo de 3. ¿Cuál es la menor suma posible de los números escritos?

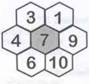
Aclaración: Dos hexágonos son vecinos si tienen un lado en común y tres hexágonos son vecinos si tienen un vértice en común.

Resolución:

Debemos evitar obtener múltiplos de 3, al sumar duplas y ternas de números.

La clave está en ubicar en el hexágono central un número que nos de más posibilidades. Si ubicamos en el centro el número **1**; podríamos emplear el 3,4, 6, 7, 9, 10, 12, ...; pero incluyen muchos múltiplos de 3 que reduce nuestras posibilidades.

Si ubicamos en el centro el número **2**; podríamos emplear el 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, ...; reduce nuestras posibilidades como el caso del 1.



Siguiendo con este proceso, ubicamos el dígito **7** en el hexágono central, podemos emplear el 1, 3, 4, 6, 9, 10, 11, ...; aumenta las posibilidades de ubicación de las parejas de números: 1 + 3 = 4; 3 + 4 = 7; ......

Nos piden la menor suma posible de los números escritos:

1 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9 + 10 = 40

Rpta 40